第 22 講・関数 $y = ax^2$ の値の変化

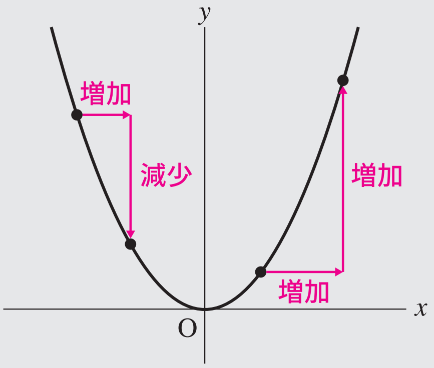
例題 1　関数 $y = ax^2$ の変化の割合①

ポイント

● 関数 $y = ax^2$ の変化の割合は**一定ではない**
変化の割合は次のように計算できる

$$（変化の割合）= \frac{（y \text{ の増加量}）}{（x \text{ の増加量}）}$$

（例）関数 $y = x^2$ の値は右の図のように変化する



問題

次の問いに答えなさい。

(1)　関数 $y = 3x^2$ について，x の値が 2 から 5 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。
(2)　関数 $y = 2x^2$ について，x の値が -1 から 3 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。
(3)　関数 $y = -x^2$ について，x の値が -6 から -2 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

解答

(1)　$x = 2$ のとき

$y = 3 \times 2^2$
$= 12$

$x = 5$ のとき

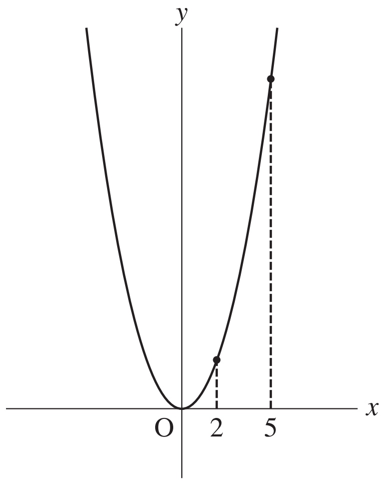
$y = 3 \times 5^2$
$= 75$

したがって，変化の割合は

$$\frac{75 - 12}{5 - 2} = \frac{63}{3}$$
$$= \mathbf{21}$$ …(答)

MEMO

(1)



⑵　$x = -1$ のとき

$y = 2 \times (-1)^2$

$= 2$

$x = 3$ のとき

$y = 2 \times 3^2$

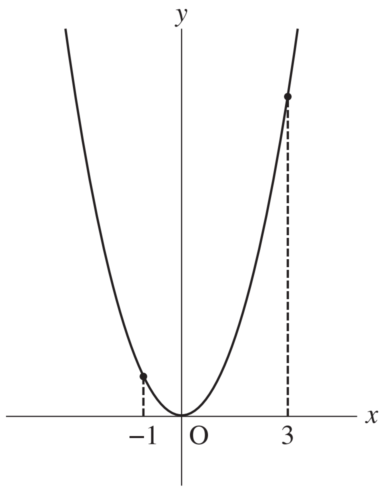
$= 18$

したがって，変化の割合は

$$\frac{18-2}{3-(-1)} = \frac{16}{4}$$

$= \mathbf{4}$　…(答)

⑵



⑶　$x = -6$ のとき

$y = -1 \times (-6)^2$

$= -36$

$x = -2$ のとき

$y = -1 \times (-2)^2$

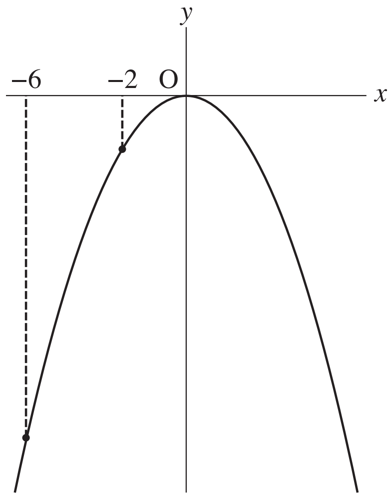
$= -4$

したがって，変化の割合は

$$\frac{-4-(-36)}{-2-(-6)} = \frac{32}{4}$$

$= \mathbf{8}$　…(答)

⑶



確認テスト 1

次の問いに答えなさい。

⑴　関数 $y = 2x^2$ について，x の値が 1 から 7 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

⑵　関数 $y = x^2$ について，x の値が -4 から -2 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

⑶　関数 $y = -3x^2$ について，x の値が -5 から 4 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

例題 2　関数 $y = ax^2$ の変化の割合②

問題

次の問いに答えなさい。

(1)　関数 $y = ax^2$ で，x が 2 から 3 まで増加するときの変化の割合が 10 であるとき，a の値を求めなさい。

(2)　2 つの関数 $y = ax^2$ と $y = 3x + 2$ で，x の値が -1 から 7 まで増加するときの変化の割合が等しいとき，a の値を求めなさい。

(3)　関数 $y = -\frac{1}{3}x^2$ で，x の値が a から $a + 3$ まで増加するときの変化の割合が 5 であるとき，a の値を求めなさい。

解答

(1)　$x = 2$ のとき

$$y = a \times 2^2$$
$$= 4a$$

$x = 3$ のとき

$$y = a \times 3^2$$
$$= 9a$$

したがって，変化の割合は

$$\frac{9a - 4a}{3 - 2} = 5a$$

このときの変化の割合は 10 なので

$$5a = 10$$
$$a = \mathbf{2}$$　…(答)

MEMO

⑵　関数 $y = ax^2$ で，$x = -1$ のとき

$$y = a \times (-1)^2$$
$$= a$$

$x = 7$ のとき

$$y = a \times 7^2$$
$$= 49a$$

したがって，変化の割合は

$$\frac{49a - a}{7 - (-1)} = \frac{48a}{8}$$
$$= 6a$$

関数 $y = 3x + 2$ の変化の割合は 3 で一定なので

$$6a = 3$$
$$a = \mathbf{\frac{1}{2}} \quad \cdots\text{(答)}$$

⑶　$x = a$ のとき

$$y = -\frac{1}{3} \times a^2$$
$$= -\frac{a^2}{3}$$

$x = a + 3$ のとき

$$y = -\frac{1}{3} \times (a + 3)^2$$
$$= \frac{-a^2 - 6a - 9}{3}$$

よって，y の増加量は

$$\frac{-a^2 - 6a - 9}{3} - \left(-\frac{a^2}{3}\right) = \frac{-6a - 9}{3}$$
$$= -2a - 3$$

したがって，変化の割合は

$$\frac{-2a - 3}{(a + 3) - a} = \frac{-2a - 3}{3}$$

このときの変化の割合は 5 なので

$$\frac{-2a - 3}{3} = 5$$
$$-2a - 3 = 15$$
$$-2a = 18$$
$$a = \mathbf{-9} \quad \cdots\text{(答)}$$

確認テスト 2

次の問いに答えなさい。

(1) 関数 $y = ax^2$ で，x が -2 から 5 まで増加するときの変化の割合が 9 であるとき，a の値を求めなさい。

(2) 2 つの関数 $y = ax^2$ と $y = -4x - 5$ で，x の値が -8 から 2 まで増加するときの変化の割合が等しいとき，a の値を求めなさい。

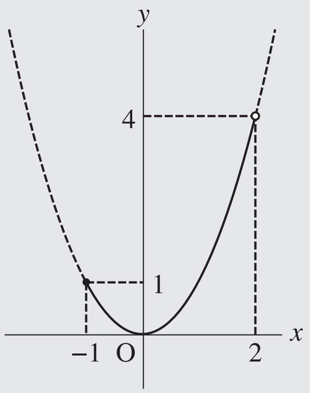
(3) 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ で，x の値が $a - 2$ から a まで増加するときの変化の割合が -4 であるとき，a の値を求めなさい。

例題 3　関数 $y = ax^2$ の変域①

ポイント

● 関数 $y = ax^2$ の変域 → グラフをかいて考える
ふくむ点は●，ふくまない点は○
で表す

（例）$y = x^2$ において，x の変域が $-1 \leqq x < 2$ のときのグラフは右の図のようになるので，y の変域は $0 \leqq y < 4$ である



問題

関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ について，x の変域が次のとき，y の変域を求めなさい。

(1) $2 \leqq x \leqq 3$

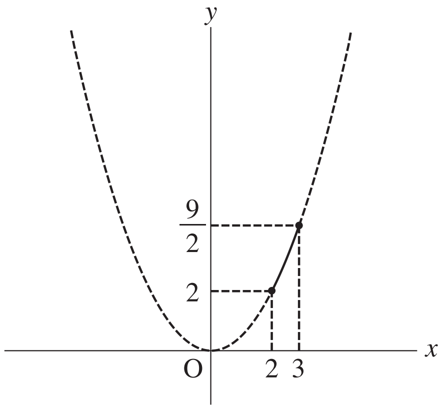
(2) $-4 \leqq x < -2$

(3) $-2 < x \leqq 4$

解答

MEMO

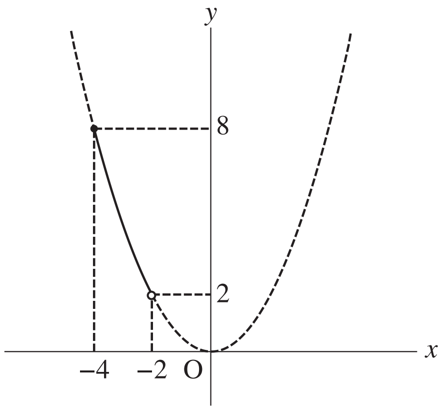
⑴　グラフは下の図のようになる。



$x = 2$ のとき $y = 2$，$x = 3$ のとき $y = \frac{9}{2}$ だから

$\mathbf{2 \leqq y \leqq \frac{9}{2}}$　**･･･(答)**

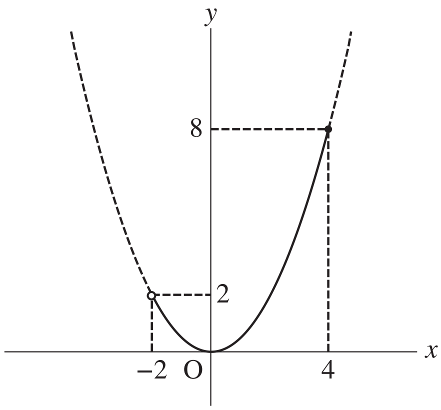
⑵　グラフは下の図のようになる。



$x = -2$ のとき $y = 2$，$x = -4$ のとき $y = 8$ だから

$\mathbf{2 < y \leqq 8}$　**･･･(答)**

(3)　グラフは下の図のようになる。



$x = 0$ のとき $y = 0$，$x = 4$ のとき $y = 8$ だから

$0 \leqq y \leqq 8$　…(答)

確認テスト 3

関数 $y = -2x^2$ について，x の変域が次のとき，y の変域を求めなさい。

(1)　$1 \leqq x < 3$

(2)　$-5 \leqq x \leqq -1$

(3)　$-3 < x \leqq 2$

例題 4　関数 $y = ax^2$ の変域②

問題

次の問いに答えなさい。

(1)　関数 $y = ax^2$ で，x の変域が $-1 \leqq x \leqq 2$ のとき，y の変域が $0 \leqq y \leqq 8$ となる。このとき，a の値を求めなさい。

(2)　関数 $y = ax^2$ で，x の変域が $-1 \leqq x \leqq 4$ のとき，y の変域が $-8 \leqq y \leqq 0$ となる。このとき，a の値を求めなさい。

ポイント

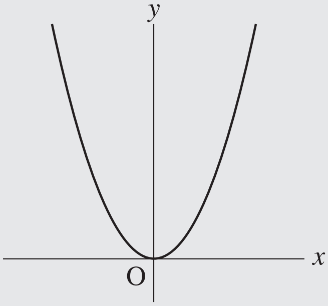
● **関数 $y=ax^2$ について，変域から a の値を求める問題**

1　**y の値から a の符号を判定する**

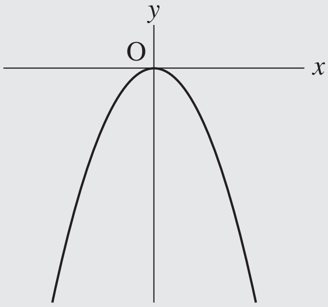
y が正の値をとるとき，a の値も正であり，

y が負の値をとるとき，a の値も負である

$a>0$



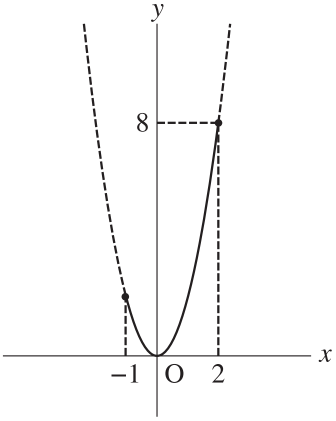
$a<0$



2　**関数 $y=ax^2$ のグラフをかき，グラフ上にある点の座標を求める**

解答

(1)　**y は正の値をとるから，a の値は正である。よって，グラフは下の図のようになる。**



関数 $y=ax^2$ のグラフは点 $(2, 8)$ を通るので，$x=2$，$y=8$ を代入すると

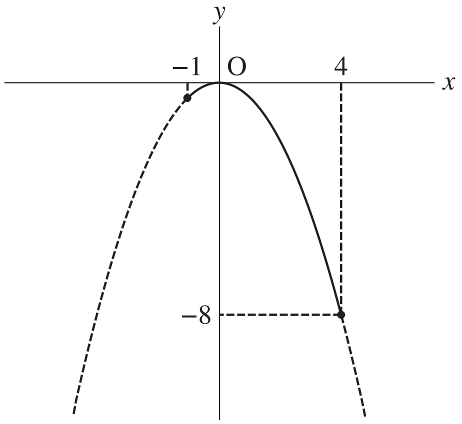
$8=a\times 2^2$

$8=4a$

$a=\mathbf{2}$　**…(答)**

MEMO

⑵　y は負の値をとるから，a の値は負である。よって，グラフは下の図のようになる。



関数 $y = ax^2$ のグラフは点 $(4, -8)$ を通るので，
$x = 4$，$y = -8$ を代入すると

$$-8 = a \times 4^2$$

$$-8 = 16a$$

$$a = -\frac{1}{2}$$ …(答)

確認テスト 4

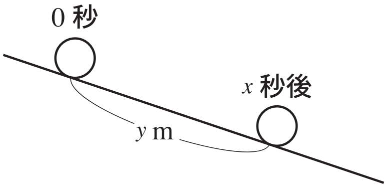
次の問いに答えなさい。

⑴　関数 $y = ax^2$ で，x の変域が $-2 \leqq x \leqq 3$ のとき，y の変域が $0 \leqq y \leqq 6$ となる。このとき，a の値を求めなさい。

⑵　関数 $y = ax^2$ で，x の変域が $-4 \leqq x \leqq 2$ のとき，y の変域が $-10 \leqq y \leqq 0$ となる。このとき，a の値を求めなさい。

例題 5 平均の速さ

問題



ある斜面でボールを転がしたとき，転がりはじめてから x 秒間に進む距離を y m とすると，$y = 3x^2$ という関係がある。次の問いに答えなさい。

(1) 転がりはじめて，1 秒後から 6 秒後までの間に，ボールは何 m 進んだか。

(2) 転がりはじめて，1 秒後から 6 秒後までの間の平均の速さを求めなさい。

(3) 転がりはじめてから 5 秒後までの平均の速さを求めなさい。

ポイント

● 平均の速さは次のように求めることができる

$$(\text{平均の速さ}) = \frac{(\text{進んだ距離})}{(\text{進んだ時間})}$$

解答

(1) $x = 1$ のとき

$y = 3 \times 1^2$

$= 3$

$x = 6$ のとき

$y = 3 \times 6^2$

$= 108$

よって，進んだ距離は

$108 - 3 =$ **105（m）** …(答)

(2) 進んだ時間は

$6 - 1 = 5$（秒）

だから，平均の速さは

$\frac{105}{5} = 21$（m/s）

よって

秒速 21 m …(答)

MEMO

⑶　$x = 5$ のとき

$y = 3 \times 5^2$

$= 75$

だから，平均の速さは

$\frac{75 - 0}{5 - 0} = 15$（m/s）

よって

秒速 15 m　…(答)

確認テスト 5

高い場所からボールを落下させるとき，落下しはじめてから x 秒間に落ちる距離を y m とすると，$y = 4.9x^2$ という関係がある。次の問いに答えなさい。

⑴　落下しはじめて，2 秒後から 4 秒後までの間に，ボールは何 m 落ちたか。

⑵　落下しはじめて，2 秒後から 4 秒後までの間の平均の速さを求めなさい。

⑶　落下しはじめてから 3 秒後までの平均の速さを求めなさい。